MA2 – „písemná" přednáška 27. 4. 2020

Minulou „přednášku" jsme skončili výpočtem integrálu

$$I = \iint_{\omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad , \text{ kde integrační oblast } \omega \text{ je kruh}$$

se středem v počátku k.s.s. a poloměru $R (>0)$. Při výpočtu integrálu pomocí Fubiniho věty jsme se dostali k nepříjemným „složitým" integrálům, bylo vidět, že kartézské souřadnice při výpočtu integrálu zde, s kruhem moc „neladí".

Pomohla naše fyzikální interpretace integrálu – – výpočet hmotnosti kruhové desky (zanedbatelné tloušťky), jejíž hustota je $\rho(x,y) = x^2+y^2$, tj. „stejná" na kružnicích o středu v počátku – a dále pomohl Newtonův postup" k integrálu a „zdravý" rozum; rozdělili jsme kruh na „proužky" o poloměru $r \in (0, R\rangle$ šířky dr o hustotě $\rho(r) = r^2$, pak hmotnost „proužku" byla $dm = \rho(r)\,2\pi r\,dr$, tj. $dm = r^2 \cdot 2\pi r\,dr$ a hmotnost pak $m = \int_0^R dm = \int_0^R r^2 2\pi r\,dr$

(tak asi zvládá integrál ve fyzice).

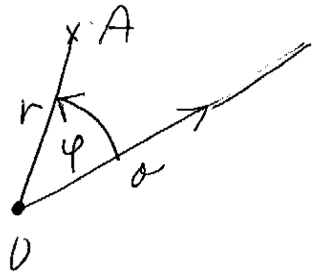
A dále:

Z hlediska „probíraného" dvojného integrálu (a Riemannova „postupu" k integrálu) je užitečné a dobré vědět, co je za tímto výpočtem integrálu I skryto, neboť asi ne u každého integrálu bude vidět tak jednoduché převedení integrálu dvojného na integrál $\int_a^b f$, jako v našem jednoduchém úvodním příkladu.

Jsou to „jiné" souřadnice bodu v rovině, vhodnější pro popis „kulatých" oblastí – a to <u>souřadnice polární</u>

(s polárními souřadnicemi jsme už pracovali v diferenciálním počtu):

Zvolíme pól O – bod v R^2 a polární osu o a každému bodu



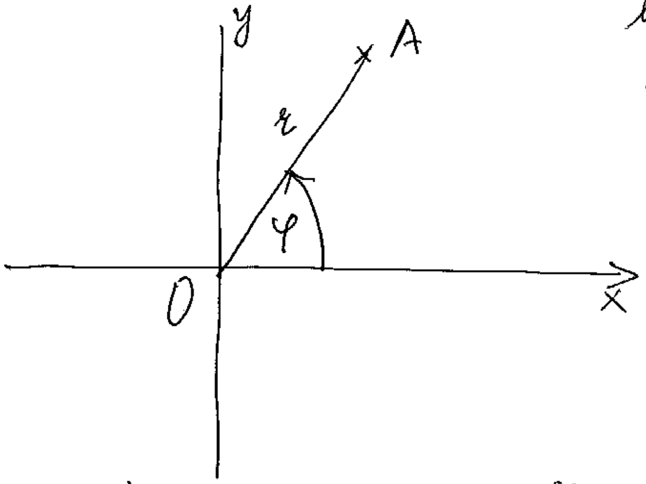
$A \in R^2$ můžeme přiřadit jeho vzdálenost v R^2 od O – r, a úhel, který svírá spojnice bodu O a A s osou o – φ, (pokud $r>0$)

$A = A(r,\varphi)$; $r>0$

je-li $r=0$, φ není definováno ;

a $\quad r \in \langle 0,+\infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

Jsou-li v rovině zadány i kartézské souřadnice, pak volíme O – počátek k.s.s. a osu o – kladnou poloosu x, pak,



když $A \neq O$, $A[x,y]$ v kartézských souřadnicích, platí:

$$x = r\cos\varphi \; , \quad r \in (0,+\infty)$$
$$y = r\sin\varphi \; \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

A popis oblasti z našeho příkladu:

$\omega_{xy} = \{ [x,y] \in R^2 ;\; x^2+y^2 \le R^2, R>0 \}$ v k.s.s.

a

$\omega_{r,\varphi} = \{ [r,\varphi] \in R^2 ;\; 0 < r \le R \;; 0 \le \varphi < 2\pi \} = \langle 0,R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$

(počátek „vypadl" z $\omega_{r,\varphi}$, ale jeden bod integrál „nezmění")

Máme-li v rovině kartézské souřadnice, pak integrál

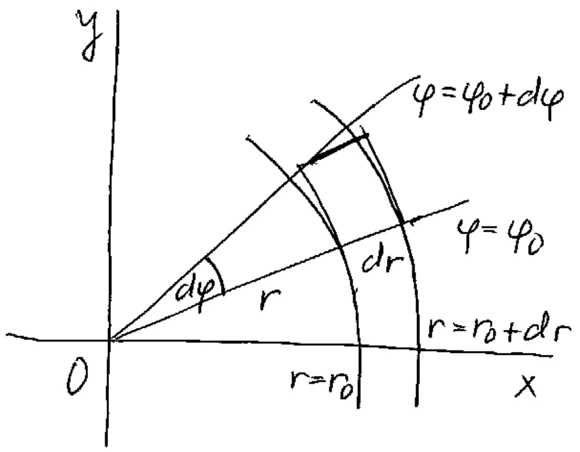
(R) $\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ je limitou Riemannových integrálních součtů

$\sigma(f, D, \{(\xi_i, \eta_j)\}) = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta_i x\, \Delta_j y$ – a pro vytvoření součtu dělíme oblast ω (přesněji vnořenou do obdélníka O, $\omega \subset O$) na obdélníčky přímkami $x = konst$, $y = konst$..

V případě souřadnic polárních je to analogické – oblast budeme „dělit" pomocí křivek, daných rovnicemi

$r = konst.$ ($r > 0$) – kružnice o středu 0 a poloměru $r > 0$)

$\varphi = konst$ ($\varphi \in \langle 0, 2\pi)$) – polopřímka s počátečním bodem 0



popišme si „dělení" ω na „v limitním provedení", tj. s „dr" a „dφ" (viz obrázek) –
– pro integrální součty potřebujeme velikost plochy dílčího „kousku" –
– a můžeme tento „kousek" nahradit (je „malý") obdélníkem (přibližně stejného obsahu) –
– a náhradní obdélníček (oblouky nahradíme zřejmě nejlépe tečnami – viz diferenciální počet) má strany dr a $r d\varphi$ (délka oblouku o poloměru r a úhlu φ), tedy, část ω..$d\omega$ je „$d\omega = r d\varphi \cdot dr$" a pak

$$\iint_{\omega_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{r\varphi}} r^2 . \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{„d\omega"}$$

(zde „zkráceno" do známého tvaru bez limity R-součtů – snad „nevadí")

Nyní už je asi vidět obecný návod pro transformaci souřadnic kartézských ve dvojném integrálu na integraci přes souřadnic polárních (ω_{xy} vyjadřuje popis „ω v k.s.s.“, $\omega_{r\varphi}$ v souřadnicích polárních):

$$(1)\qquad \iint\limits_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$$

Obecně se říká – substituce ve dvojném integrálu do polárních souřadnic.

A podíváte-li se do skript (nebo i jiné literatury), dočtete se:

Máme-li transformaci kartézských souřadnic do polárních,

$$(*)\quad \begin{cases} x(r,\varphi) = r\cos\varphi & ,\ r\in(0,+\infty) \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi & \ \ \varphi\in\langle 0,2\pi) \end{cases},$$

pak Jacobiho matice je $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi), & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi), & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

(bylo v dif. počtu)

a označme-li $J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix}$ – Jacobián zobrazení $(*)$

(determinant Jacobiho matice)

platí:

$$(2)\qquad \iint\limits_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,|J(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi$$

pro ω_{xy} – měřitelnou a $f\in R(\omega_{xy})$

Návody (1) a (2) pro substituci ve dvojném integrálu do polárních souřadnic se neliší (následně), neboť

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r$$

Je asi „dobré" trochu vysvětlit, jak se ten Jacobián $J(r,\varphi)$ v integrálu „objeví" – a jak to souvisí s tou naší cestou ke vzorci (1) – i po naší cestě" jsme blízko, stačí celkem „snadný" krok a dostaneme se ke tomu Jacobiánu – – a pomůže to pak k pochopení obecného tvrzení o substituci v dvojném (a pak i v trojném) integrálu.

Zřejmě Jacobián $J(r,\varphi)$ souvisí s výpočtem velikosti té „malé" plochy, vzniklé při dělení oblasti ω při integraci:

Transformace do polárních souřadnic je vlastně vektorové zobrazení z $(0,\infty)\times\langle 0,2\pi)$ do R^2:

$$x(r,\varphi)=r\cos\varphi, \quad x(r,\varphi)\in C^{(1)}((0,+\infty)\times\langle 0,2\pi))$$
$$y(r,\varphi)=r\sin\varphi, \quad y(r,\varphi)\in C^{(1)}(\quad \text{—"—} \quad)$$

(1) pro $r=r_0$ máme kružnici $\forall\varphi\in\langle 0,2\pi)$ (kružnici o poloměru r)

$$x(\varphi)=r_0\cos\varphi \qquad x'(\varphi)=-r_0\sin\varphi$$
$$y(\varphi)=r_0\sin\varphi \quad \text{pak} \quad y'(\varphi)=r_0\cos\varphi$$
je tečný vektor v $[r_0,\varphi]$,

$\vec{\tau}_\varphi(\varphi_0)=(x'(\varphi_0), y'(\varphi_0))$ je tečný vektor v bodě $[r_0,\varphi_0]$ a

$\tau_\varphi(\varphi_0)d\varphi=(x'(\varphi_0), y'(\varphi_0))\,d\varphi$ – vektor, který je tečný k oblouku našeho kousku při dělení oblasti ω a tak je vlastně stranou „náhradního" obdélníčku (aproximujícího plošku „kůrovou"), Tedy, jedna „strana" obdélníčka (aproximujícího část w při dělení) je vektor $\underline{(-r_0 \sin\varphi_0,\ r_0 \cos\varphi_0)\,d\varphi}$;

(ii) podobně, pro $\varphi = \varphi_0$ dostáváme polopřímku s parametrizací

$$\begin{aligned} x(r) &= r\cos\varphi_0 \\ y(r) &= r\sin\varphi_0 \end{aligned}, \quad r>0 \quad \text{a pak} \quad \begin{aligned} x'(r) &= \cos\varphi_0 \\ y'(r) &= \sin\varphi_0 \end{aligned}$$

je tečný vektor (a zde i směrový dané polopřímky)

a tak máme i druhou stranu příslušného obdélníčka – – tj. vektor $\underline{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\cdot dr}$

A když jsme probírali determinant matice, jedna aplikace (na začátku) byla výpočet obsahu rovnoběžníka (v rovině), jehož strany jsou různoběžné vektory $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$ –

$$- \quad S = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right|$$

(determinanty matice a matice transponované se rovnají).

Tedy zde: plocha „elementární části" w (vektory stran jsou v (i)(ii)),

je dána ab. hodnotou determinantu

$$\left|\begin{matrix} \cos\varphi_0\,dr, & -r_0\sin\varphi_0\,d\varphi \\ \sin\varphi_0\,dr, & r_0\cos\varphi_0\,d\varphi \end{matrix}\right| \overset{(ii)}{=} \left|\begin{matrix} \cos\varphi_0, & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0, & r_0\cos\varphi_0 \end{matrix}\right| dr\cdot d\varphi =$$

$= J(r_0,\varphi_0)\,dr\,d\varphi$ – a toto je tedy ve vzorci (a doufám, že i teď vidíte, že se takto počítá „plocha" při polárních souřadnicích)

A před příklady na užití substituce do polárních souřadnic uvedeme ještě obecné znění věty o substituci ve dvojném integrálu:

<u>Def.:</u> Nechť je dáno zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, které zobrazuje množinu $O_{uv} \subset R^2$ do množiny $O_{xy} \subset R^2$; můžeme psát

$$\Phi(u,v) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) = (x,y),$$

takové, že

(i) Φ je prosté na O_{uv}, O_{uv} – oblast

(ii) $\Phi \in C^{(1)}(O_{uv})$ (tj. Φ_1, Φ_2 mají v O_{uv} spojité parciální derivace 1. řádu)

(iii) Jacobián zobrazení Φ, tj.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ v } O_{uv}$$

Takové <u>zobrazení Φ s vlastnostmi (i)–(iii) se nazývá regulární zobrazení.</u>

<u>Pak platí: Věta (o substituci ve dvojném integrálu):</u>

Nechť $f \in R(\omega_{xy})$, $\omega_{xy} \subset R^2$ je měřitelná oblast a nechť $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ je regulární zobrazení, $\Phi(\omega_{uv}) = \omega_{xy}$ (ω_{uv} – měřitelná oblast). Pak

$$\iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{uv}} f(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

Příklady užití substituce do polárních souřadnic.

1. Obsah kruhu o poloměru $R>0$ (snadný výpočet)

$\omega_{xy} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq R^2\}$, ($= K_{xy}(R)$ – budeme značit kruhy)

$\omega_{r\varphi} = \{[r,\varphi];\ 0<r\leq R;\ 0\leq\varphi<2\pi\}$ ($= K_{r\varphi}(R)$)

(přičemž jeden – v $\omega_{r\varphi}$ chybí" přímka, ale pro dvojné integraci jeden bod, že chybí, „nevadí" – viz věty o existenci $\iint_\omega f$)

$$\underline{S(K(R))} = \iint_{K_{xy}(R)} dx\,dy = \iint_{K_{r\varphi}(R)} r\,dr\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr =$$

(míra oblasti $\omega = \iint_\omega 1\,dx\,dy$)

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underline{\pi R^2}$$

2. Máme „zkontrolovat", že objem kuželu o poloměru základny $R>0$ a výšce $v=R$ je $V = \frac{1}{3}\pi R^3$:

(i) „model" (pro výpočet):

kuželová plocha daných vlastností je graf funkce $f(x,y) = R - \sqrt{x^2+y^2}$, a kužel v příkladu je pak oblast

$\Omega = \{[x,y,z];\ 0\leq z\leq R-\sqrt{x^2+y^2}\}$, tj.

základna $\omega_{xy} = \{[x,y];\ \sqrt{x^2+y^2}\leq R\} = K(R)$, a budeme integrovat fci $f(x,y) = R-\sqrt{x^2+y^2}$ v $\omega_{xy} = K(R)$

(pro výpočet objemu), tedy:

$$V(\Omega) = \iint_{\substack{K(R)\\ xy}} \left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy \underset{\substack{\text{polární}\\ \text{souřadnice}}}{=} \iint_{\substack{K(R)\\ r,\varphi}} (R-r)\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

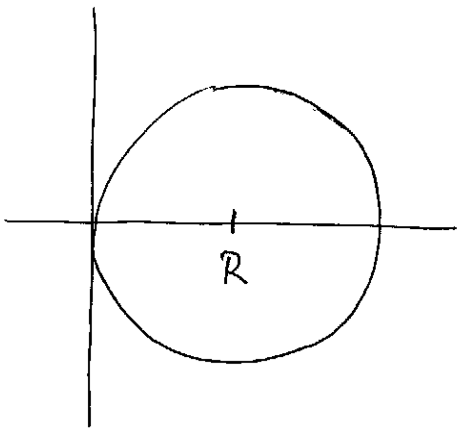
$$\underset{r,\varphi}{K(R)} = \{[r,\varphi];\ 0 < r \leq R;\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R-r)\cdot r\,dr = 2\pi \int_0^R (R\cdot r - r^2)\,dr = 2\pi\left[R\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

$$= 2\pi\left(\frac{R^3}{2}-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{\pi R^3}{3} \quad (\text{cbd})$$

3. Určete moment setrvačnosti homogenního kruhu vzhledem k ose, jdoucí (kolmo k rovině kruhu) bodem na obvodu kruhu.

Vzorec pro moment setrvačnosti aplikovaný pro naši úlohu:
– lze si představit talíř – budeme počítat J pro oblast



$\omega_{xy} = \{(x,y);\ (x-R)^2+y^2 \leqq R^2\}$
vzhledem k počátku s. s.
(hustota je ρ = konst), pak obecně

$$J = \iint_{\omega_{xy}} d^2(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow \text{(zde pro } \omega_{xy})$$

($d(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy)

$$J = \iint_{\omega_{xy}} (x^2+y^2)\cdot\rho\,dx\,dy \underset{\text{pol. s.}}{=} \rho\iint_{\omega_{r,\varphi}} r^2\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

– pěkné – ale potřebujeme ještě „popis" $\omega_{r\varphi}$.

$(x,y) \in \omega_{xy} \iff (x-R)^2+y^2 \leqq R^2$, tj.

$x^2-2xR+\cancel{R^2}+y^2 \leqq \cancel{R^2} \iff x^2+y^2 \leqq 2xR$ (*)

a převedeme-li „(*) do souřadnic polárních ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ pro $r>0$)

tak $r^2 \leqq 2r\cos\varphi R$ (a $r>0$) $\Rightarrow 0<r \leqq 2\cos\varphi \cdot R$ –

a máme tedy meze pro r: $0 < r \leq 2R\cos\varphi$

a odtud i pro φ (neboť $\cos\varphi>0$ dá:) $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

(„φ" může být i v jiných intervalech než v $\langle 0, 2\pi)$ díky periodicitě $\cos\varphi$)

tj. $\omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi);\ 0<r \leq 2R\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\}$

a zároveň je odtud vidět „jaké bude pořadí integrace ve Fubiniho větě" – protože meze pro r závisí na φ (v našem vyjádření $\omega_{r\varphi}$), integrace „přes" r bude integrací vnitřní: tedy

$$\underline{J} = \rho \iint_{\omega_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{\text{polis.}}{=} \rho \iint_{\omega_{r\varphi}} r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^3\,dr =$$

$$= \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4R^4\cos^4\varphi\,d\varphi \underset{\uparrow}{=} 8R^4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

(sudost fce)

$$= 8\rho R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 2\rho R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 2\rho R^4 \left\{ [\varphi+\sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi \right\} = 2\rho R^4 \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$= 2\rho R^4 \left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\} = \underline{\frac{3}{2}\pi R^4}$$

a fyzikální poznámka:

moment setrvačnosti v této úloze lze spočítat i dle Steinerovy věty:

$$J = J_T + m d_T^2$$

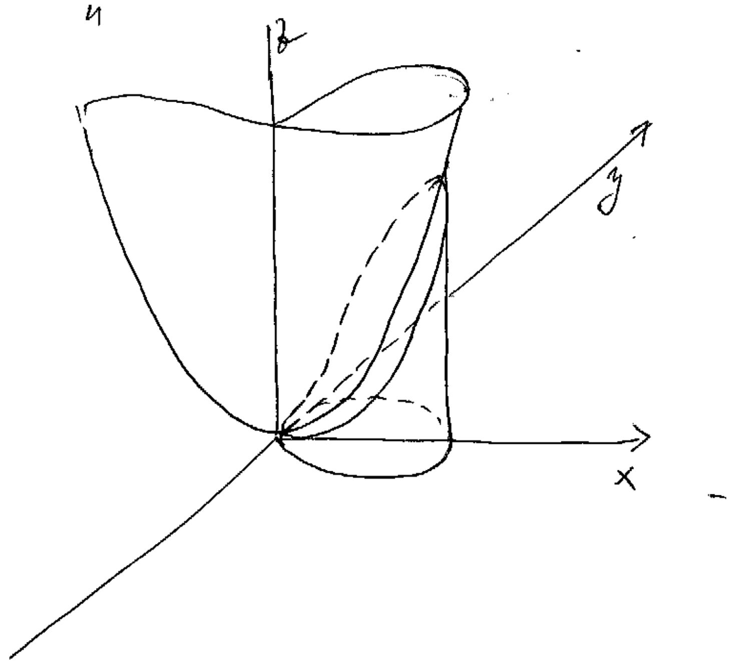
(J_T – moment setrvačnosti ω vzhledem k ose, jdoucí těžištěm a $m d_T^2$ je moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti ω, umístěného v těžišti, vzhledem k ose rotace)

Zde tedy: $$J_T = \rho \iint\limits_{K(R)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \rho \pi \frac{R^4}{2}$$

(neboť kruh je homogenní, tedy těžiště je střed kruhu) a hmotnost kruhu je $\rho \cdot \pi R^2$ a $d_T = R$ (těžiště má souřadnice $T = [R, 0]$), tedy

$$J = \rho \pi \frac{R^4}{2} + \rho \pi R^2 \cdot R^2 = \frac{3}{2} \rho \pi R^4 \quad \text{(opět!)}$$

a „geometricky" lze náš příklad interpretovat jako výpočet objemu oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, která je ohraničená rovinou $z=0$, rotačním paraboloidem o rovnici $z = x^2+y^2$ a válcovou plochou o rovnici $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ –



– tedy integrujeme funkci $f(x,y) = x^2+y^2$, a obor integrace je „rovině" ω_{xy}.

4. Vypočti $\displaystyle\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$: (K(R) – kruh o středu v počátku a poloměru R)

Představit si můžeme opět objem oblasti Ω, která je „zdola" ohraničená rovinou $z=0$, shora rotační plochou, která je grafem funkce $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ (rotační plocha, která vznikne rotací grafu $f(x)=e^{-x^2}$ kolem osy z) a válcovou plochou $x^2+y^2=R^2$.

Budeme-li chtít počítat v kartézských souřadnicích a užít Fubiniho větu, pak bude „zle", neboť:

$$\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-x^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-y^2}\,dy$$

– ale (bez důkazu) jsme si řekli, že primitivní funkci k $f(x)=e^{-x^2}$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí (i když existuje) – tedy „neumíme"!

Ale užitím souřadnic polárních – jde počítat „krásně":

$$\iint\limits_{K(R)_{xy}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{K_{r\varphi}(R)} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= 2\pi\left[\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-r^2}\right]_0^R = -\frac{2\pi}{2}\left(e^{-R^2}-1\right) = \underline{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}$$

(zde Jacobian „r" pomohl jako derivace vnitřní fce u 1VS !)

5. <u>Zkuste analogicky i</u>

$$\iint\limits_{K(R)} \sin\,(x^2+y^2)\,dx\,dy \quad . \text{ nebo}$$

$$\iint\limits_{\omega} \sin\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,, \quad \omega = \{(x,y)\in R^2;\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$$

nebo $\displaystyle\iint\limits_{\omega} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$, kde $\omega =$ — " — .

A ještě jedna poznámka – povšimněte si podobnosti "mezi" (píšu zde "bez předpokladů" – jde o "princip")
<u>1. věty o substituci u funkcí jedné proměnné</u>

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

a

$$\iint\limits_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_{uv}} f\big(\underbrace{x(u,v),y(u,v)}_{\Phi(u,v)}\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$\varphi((\alpha,\beta)) = (\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$ (pro $\varphi'(t)>0$)

a $\Phi(\omega_{uv}) = \omega_{xy}$

a místo jedné derivace $\varphi'(t) \longrightarrow$ "nastupuje" u dvou proměnných Jacobián – "všechny parciální derivace transformace $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2)(u,v)$"

5. „Kontrola" vzorce pro výpočet objemu koule o poloměru $R>0$:

Koule $\Omega_K(R) = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

(pro výpočet objemu jsme zvolili střed koule v počátku).

Pak objem můžeme počítat jako $2 \times$ objem „polokoule"

$$\Omega_{1/2} = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le R^2 \text{ a } z \ge 0\}$$

Pak $$V(\Omega_{1/2}) = \iint\limits_{K(R)} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$ neboť:

ze vztahu $x^2+y^2+z^2 \le R^2 \Rightarrow z^2 \le R^2-(x^2+y^2)$, tj.
$|z| \le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

a $z \ge 0$ dá: $0 \le z \le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

a užijeme základní aplikaci dvojného integrálu pro výpočet objemu oblasti, ohraničené kladnou (nezápornou) funkcí „nad oblastí" $\omega \subset R^2$, kde $\omega_{xy} = K(R)$ – dodáme tuto informaci „matematicky" z podmínky $0 \le R^2-(x^2+y^2)$, tj. $x^2+y^2 \le R^2$, nebo díky „zdravému rozumu".

A opět výpočet nebude pěkný v kartézských souřadnicích (můžete si vyzkoušet). A tedy se obrátíme na souřadnice polární: kde $\omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi);\ 0<r\le R,\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\}$

a integrujeme (na další straně):

$$V(\Omega_k)=2\iint\limits_{K_{x,y}(R)} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\iint\limits_{K_{r,\varphi}(R)} \sqrt{R^2-r^2}\,.\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,.\,r\,dr = 4\pi \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \left| \begin{array}{l} R^2-r^2=t \\ -2r\,dr=dt \\ r=0 \rightarrow t=R^2 \\ r=R \rightarrow t=0 \end{array} \right|$$

$$= -\frac{4\pi}{2} \int_{R^2}^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{4\pi}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{R^2}^0 = \underline{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

6. <u>Zkuste sami – objem tělesa</u> (tj. omezené oblasti $\Omega \subset R^3$), které je ohraničené plochami $z = x^2+y^2$ (tj. rotačním paraboloidem) a plochou o rovnici $x^2+y^2+z^2=6$ (tj. kulovou plochou o středu v počátku)

(„návod" - $V(\Omega) = \iint\limits_{K(\sqrt{2})} \left(\sqrt{6-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)\right)dx\,dy$

a užijte polární souřadnice k výpočtu integrálu.
A promyslete i „model")